Chapitre 10

Système de masse variable et référentiels accélérés

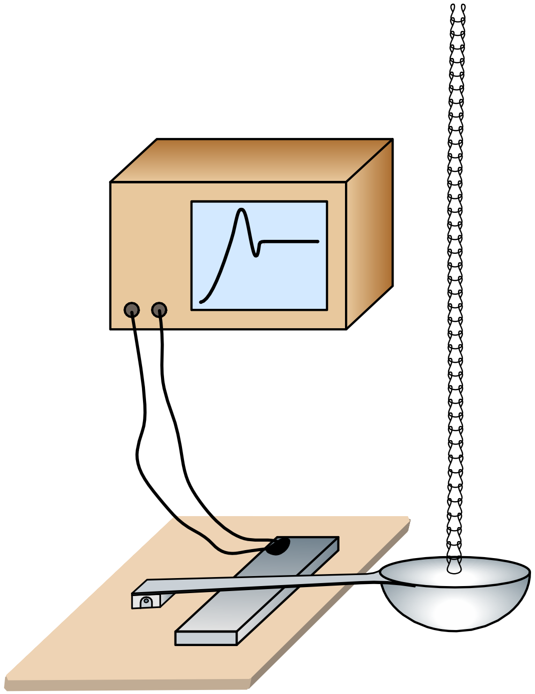
EPFL

- **Système de masse variable :** système ouvert dont la masse $m(t)$ est une fonction du temps t car son débit est non-nul :

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad dm = \dot{m}\,dt \tag{10.1}$$

1. **Baignoire**

2. **Chaînette**



3. **Chariot**

4. **Fusée**

10.1.1 Poussée d'une fusée

- **Masse de la fusée :**

$$m\,(t+dt) = m\,(t) + dm \qquad (10.2)$$

où $dm < 0$ est la masse des gaz éjectés

- **Quantité de mouvement :** fusée et gaz

$$\boldsymbol{p}\,(t+dt) = \underbrace{(m\,(t)+dm)\,(\boldsymbol{v}\,(t)+d\boldsymbol{v})}_{\text{fusée}} + \underbrace{(-\,dm)\,(\boldsymbol{v}\,(t)+\boldsymbol{u})}_{\text{gaz}} \qquad (10.3)$$

où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse relative d'éjection des gaz

- **Quantité de mouvement :** 1^{er} ordre

$$\boldsymbol{p}\,(t+dt) = \underbrace{m\,(t)\,\boldsymbol{v}\,(t)}_{=\boldsymbol{p}(t)} + m\,(t)\,d\boldsymbol{v} + \cancel{dm\,d\boldsymbol{v}} - dm\,\boldsymbol{u} \qquad (10.4)$$

- **Quantité de mouvement :** (10.4)

$$\boldsymbol{p}\,(t+dt) = \boldsymbol{p}\,(t) + m\,(t)\,d\boldsymbol{v} - \,dm\,\boldsymbol{u}$$

- **Variation infinitésimale :** quantité de mvt

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\,(t+dt) - \,\boldsymbol{p}\,(t)$$

$$= m\,(t)\,d\boldsymbol{v} - \,dm\,\boldsymbol{u} \qquad (10.5)$$

- **Loi du mouvement :** (10.5) dans (2.17)

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \,\frac{dm}{dt}\,\boldsymbol{u} \qquad (10.6)$$

- **Loi du mouvement :** (10.6) remise en forme

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \dot{m}\,\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{a} \qquad (10.7)$$

où $\boldsymbol{u} = \textbf{cste}$.

- **Loi du mouvement :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \dot{m}\,\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{a} \qquad (10.7)$$

- **Poussée :** force orientée vers le haut

$$\dot{m}\,\boldsymbol{u} \qquad \text{où} \qquad \dot{m} < 0$$

La poussée est orientée vers le haut dans le sens du mouvement car la vitesse relative $\boldsymbol{u}$ des gaz est orientée vers le bas.

- **Loi du mouvement :** sans frottement

$$m\,\boldsymbol{g} + \dot{m}\,\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{a} \qquad (10.8)$$

où la seule force extérieure est le poids $m\,\boldsymbol{g}$.

- **Loi du mouvement :**

$$m\,\boldsymbol{g} + \dot{m}\,\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{a} \qquad (10.8)$$

1. **Champ gravitationnel :**

$$\boldsymbol{g} = -\,g\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

2. **Vitesse relative :**

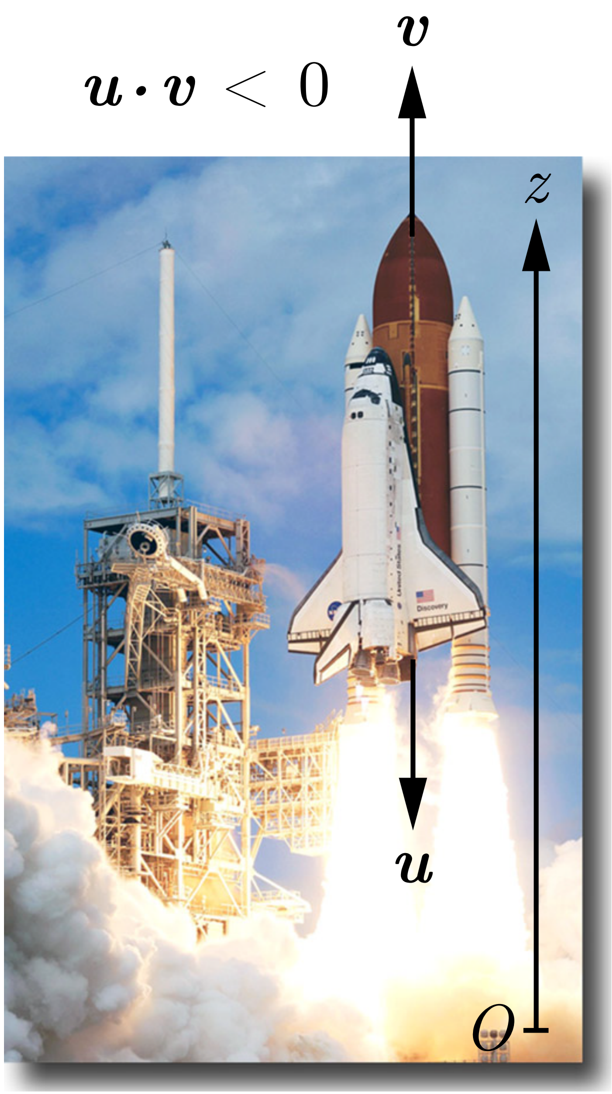
$$\boldsymbol{u} = -\,u\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (10.9)$$

3. **Accélération :**

$$\boldsymbol{a} = \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

- **Equation du mouvement :**

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{z}} : \quad -\,mg - \dot{m}\,u = m\ddot{z} \qquad (10.10)$$



- **Equation du mouvement :**

  selon $\hat{\boldsymbol{z}}$:
  $$-\,mg - \dot{m}\,u = m\ddot{z} \qquad (10.10)$$

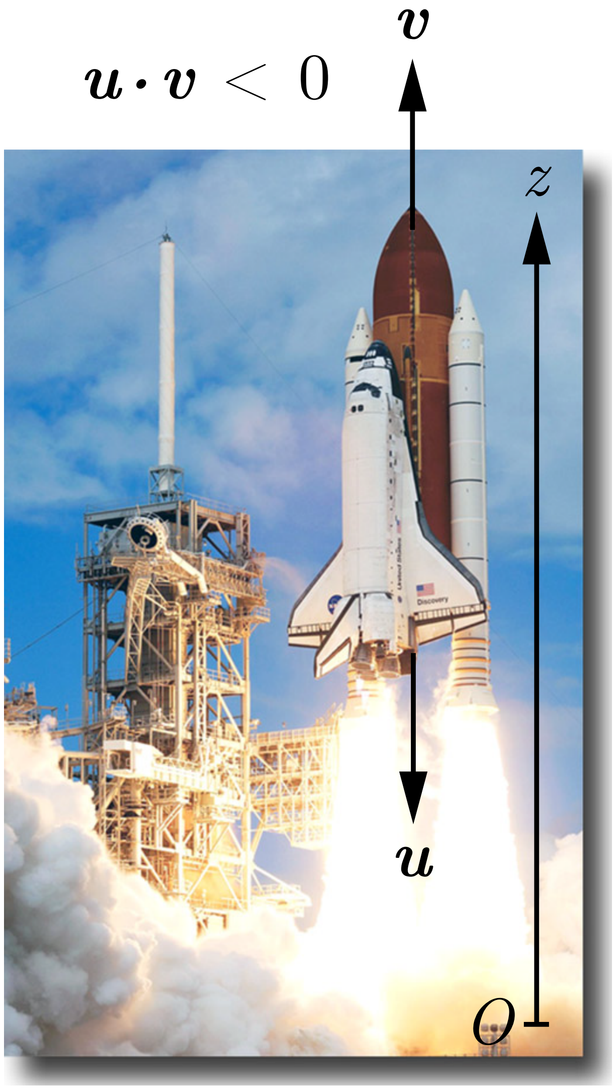
- **Condition de décollage :** à $t = 0$

  $$\ddot{z}\,(0) > 0 \qquad (10.11)$$

- **Condition de décollage :** poussée et poids

  $$|\,\dot{m}\,(0)\,u\,| = -\,\dot{m}\,(0)\,u > m\,(0)\,g \qquad (10.12)$$

  Il faut que la poussée initiale $\dot{m}\,(0)\,\boldsymbol{u}$ soit supérieure en norme au poids initial $m\,(0)\,\boldsymbol{g}$ pour que la fusée décolle.



1. **Fusée à air :** la poussée est le produit du débit de masse $\dot{m}$ et de la vitesse relative u d'éjection de l'air. La vitesse relative u d'éjection de l'air dépend de la pression de l'air dans la fusée.

2. **Fusée à eau :** la poussée de la fusée à eau est beaucoup plus importante que celle de la fusée à air. En effet, le débit de masse $\dot{m}$ est beaucoup plus grand avec de l'eau alors que la vitesse d'éjection est similaire car la pression est comparable.

- **Equation du mouvement :** (10.10)

$$m(t)\,\frac{d\dot{z}}{dt} = -\,m(t)\,g - \frac{dm(t)}{dt}\,u \qquad (10.13)$$

- **Différentielle de la vitesse :**

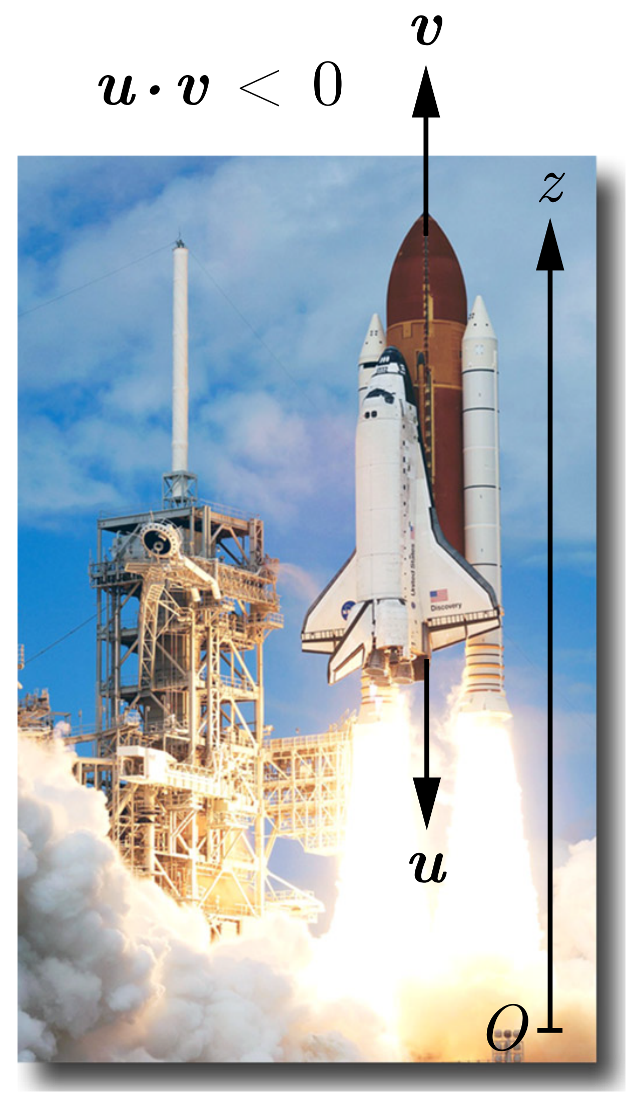
$$d\dot{z}(t) = -\,g\,dt - u\,\frac{dm(t)}{m(t)} \qquad (10.14)$$

- **Intégrale :** (10.15) $t' = 0$ à $t' = t$

$$\int_0^{v_z(t)} d\dot{z}(t') = -\,g\int_0^t dt' - u\int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm'(t')}{m'(t')}$$

- **Vitesse :**

$$v_z(t) = -\,gt - u\ln\left(\frac{m(t)}{m(0)}\right) \qquad (10.16)$$



- **Vitesse :**

$$v_z(t) = -\,gt - \,u\ln\left(\frac{m(t)}{m(0)}\right) \qquad (10.16)$$

- **Débit de masse négatif :** (10.17)

$$m(t) \leqslant m(0) \qquad \text{ainsi} \qquad \ln\left(\frac{m(t)}{m(0)}\right) \leqslant 0$$

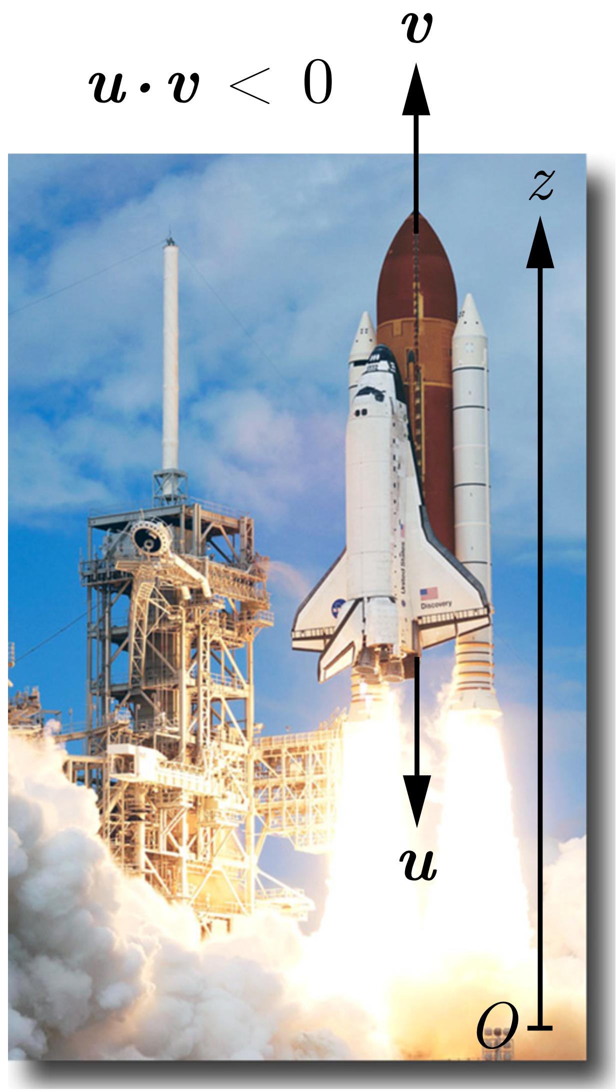
- **Condition d'ascension :** (10.18)

$$v_z(t) \geqslant 0 \qquad \text{ainsi} \qquad 0 \leqslant t \leqslant -\,\frac{u}{g}\ln\left(\frac{m(t)}{m(0)}\right)$$

- **Temps d'ascension :** temps t_m

$$t_m = -\,\frac{u}{g}\ln\left(\frac{m(t_m)}{m(0)}\right) \qquad (10.19)$$

Pour déterminer le temps d'ascension t_m, il faut connaître explicitement la fonction $m(t)$.

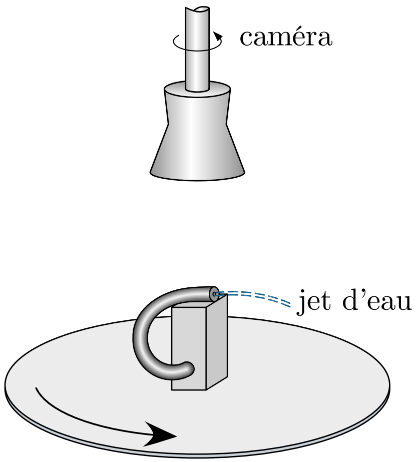


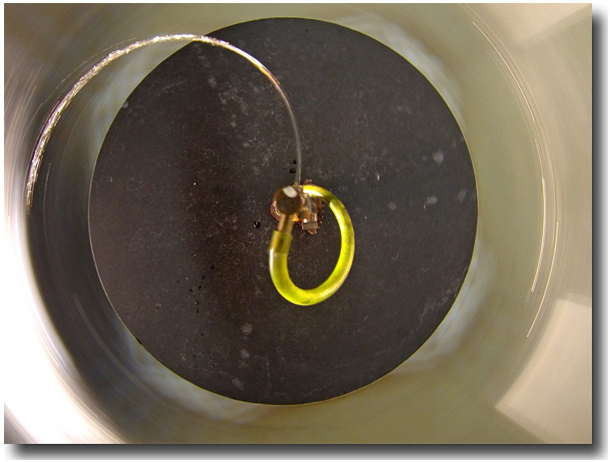
1. **Référentiel d'inertie :** référentiel où le principe d'inertie est vérifié : en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel est un mouvement rectiligne uniforme. Les référentiels d'inertie se déplacent à vitesse constante les uns par rapport aux autres. Donc l'accélération d'un point matériel est la même dans tous ces référentiels.

   - **Loi du mouvement :** la 2^e loi de Newton est la même dans tous les référentiels d'inertie. La cause du mouvement est la résultante des forces extérieures.

2. **Référentiel accéléré :** référentiel où le principe d'inertie n'est pas vérifié : en absence de force extérieure résultante, le mouvement d'un point matériel n'est pas un mouvement rectiligne uniforme en raison de forces d'inertie. Ces forces sont les causes de l'accélération non-nulle d'un référentiel accéléré par rapport à un référentiel d'inertie quelconque.

   - **Loi du mouvement :** la 2^e loi de Newton reste mathématiquement la même dans un référentiel accéléré que dans un référentiel d'inertie, mais son interprétation change. Certains termes de l'accélération de l'objet ne sont plus perceptibles dans un référentiel accéléré ce qui va se traduire par la présence de forces supplémentaires qu'on appelle des forces d'inertie.





- Le mouvement radial du jet d'eau qui sort d'une buse est filmé par une caméra en rotation avec la buse.

1. **Référentiel d'inertie du sol :** d'après le principe d'inertie, le mouvement horizontal du jet d'eau est un mouvement rectiligne uniforme car il n'y a pas de force extérieure horizontale exercée sur le jet d'eau.

2. **Référentiel accéléré en rotation :** l'accélération centripète de la caméra par rapport au sol génère une force centrifuge dans le référentiel de la caméra. Le mouvement horizontal du jet d'eau n'est un mouvement rectiligne uniforme. C'est une portion de spirale logarithmique due à l'action conjointe de deux force d'inertie dans ce référentiel : la force centrifuge et la force de Coriolis.

1. **Référentiel absolu :** référentiel d'inertie

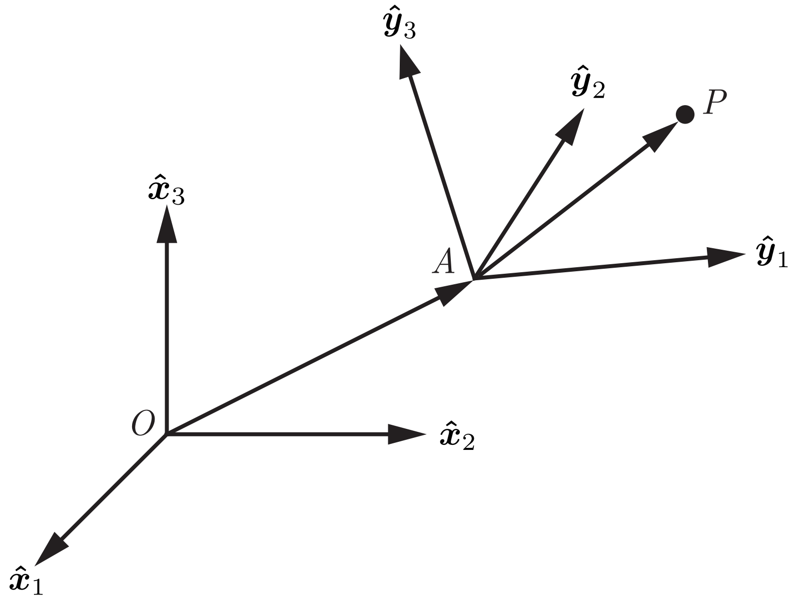
   Le repère absolu $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ d'origine O est immobile par rapport au référentiel absolu.

2. **Référentiel relatif :** référentiel accéléré

   Le repère relatif $(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ d'origine A est immobile par rapport au référentiel relatif.

1. **Mouvement absolu :** mouvement du point matériel P par rapport au référentiel d'inertie.

2. **Mouvement relatif :** mouvement du point matériel P par rapport au référentiel accéléré.



- **Géométrie :**

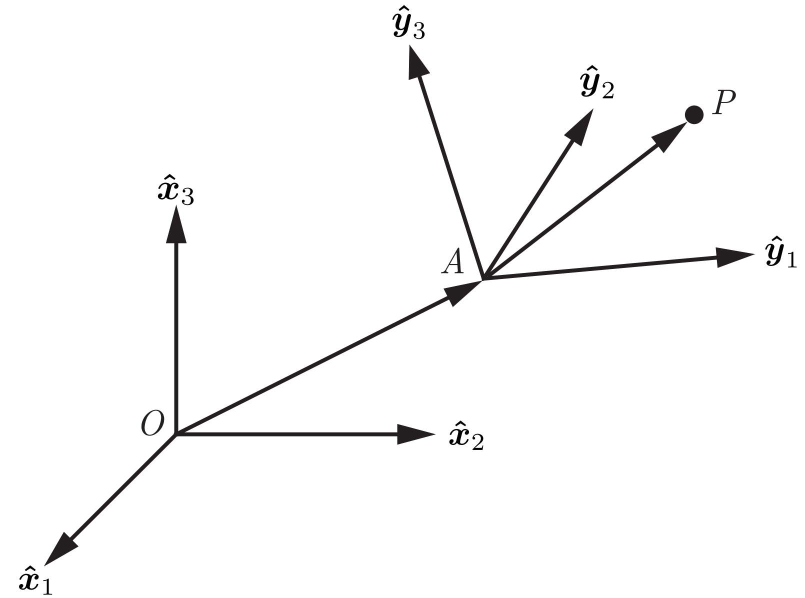
$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP} \qquad (10.20)$$

- **Position absolue :** point matériel P

$$\boldsymbol{r}_a(P) = \boldsymbol{OP} = \sum_{i=1}^{3} x_i\, \hat{\boldsymbol{x}}_i \qquad (10.21)$$

- **Position relative :** point matériel P

$$\boldsymbol{r}_r(P) = \boldsymbol{AP} = \sum_{i=1}^{3} y_i\, \hat{\boldsymbol{y}}_i \qquad (10.21)$$



- **Position absolue :** point A

$$\boldsymbol{r}_a(A) = \boldsymbol{OA} \qquad (10.21)$$

- **Positions absolue et relative :** point matériel P (10.21) dans (10.20)

$$\boxed{\boldsymbol{r}_a(P) = \boldsymbol{r}_a(A) + \boldsymbol{r}_r(P) \qquad (10.22)}$$

- **Repères :** le repère absolu $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ est immobile et le repère relatif $(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$ a un mouvement de translation et de rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport au repère absolu (cas général).

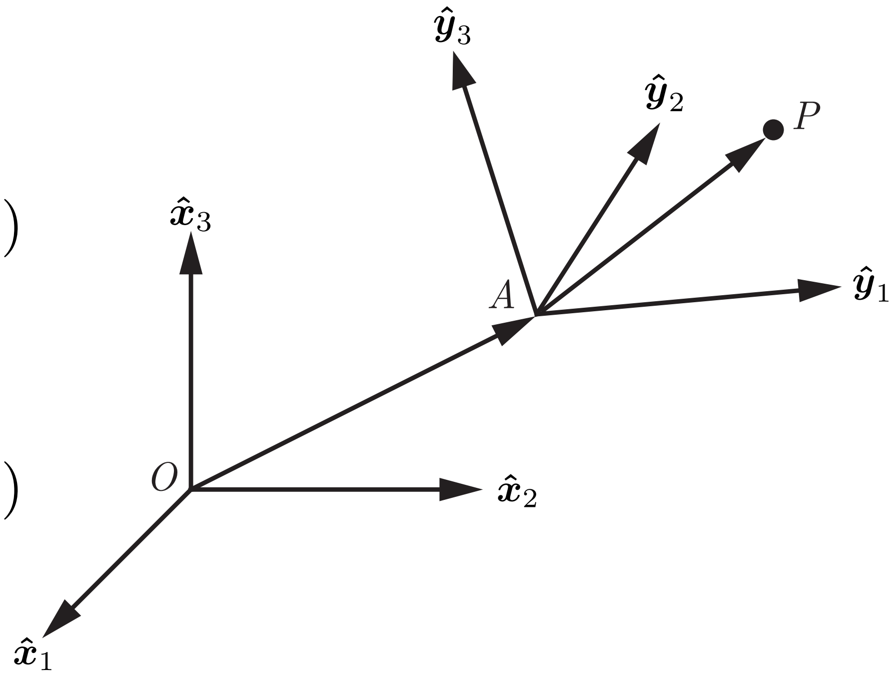
- **Rotation relative :** le mouvement de translation du repère relatif ne modifie pas les vecteurs de ce repère, seul le mouvement de rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ les change. Ce changement est décrit par les formules de Poisson (5.34).

1. **Dérivées :** repère absolu

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i = \boldsymbol{0} \qquad \forall\ i = 1, 2, 3 \qquad (10.23)$$

2. **Dérivées :** repère relatif (5.34)

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_i \quad \forall\ i = 1, 2, 3 \quad (10.23)$$



- **Positions absolue et relative :** point matériel P

$$\boldsymbol{r}_a\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}x_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\qquad\text{et}\qquad\boldsymbol{r}_r\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}y_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i\tag{10.21}$$

- **Dérivées temporelles :** positions absolue et relative (10.22)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a\left(P\right)=\dot{\boldsymbol{r}}_a\left(A\right)+\dot{\boldsymbol{r}}_r\left(P\right)\tag{10.24}$$

- **Dérivées temporelles :** repères absolu et relatif

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i=\boldsymbol{0}\qquad\text{et}\qquad\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i=\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\qquad\forall\ i=1,2,3\tag{10.23}$$

- **Dérivée temporelle :** position absolue

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i+\sum_{i=1}^{3}x_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i\overset{(10.23)}{=\!=\!=}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\tag{10.25}$$

- **Dérivée temporelle :** position relative

$$\dot{\boldsymbol{r}}_r\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i+\sum_{i=1}^{3}y_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i\overset{(10.23)}{=\!=\!=}\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i+\sum_{i=1}^{3}y_i\left(\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\right)\tag{10.25}$$

- **Dérivées temporelles :** positions absolue et relative

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a\left(P\right) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{r}}_r\left(P\right) = \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i + \sum_{i=1}^{3} y_i\left(\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\right) \tag{10.25}$$

- **Identité vectorielle :**

$$\sum_{i=1}^{3} y_i\left(\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\right) = \boldsymbol{\Omega}\times\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i\right) \overset{(10.21)}{=\!=\!=} \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r\left(P\right) \tag{10.26}$$

- **Vitesses absolue et relative :** point matériel P et point A

$$\boldsymbol{v}_a\left(P\right) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\,, \quad \boldsymbol{v}_r\left(P\right) = \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_a\left(A\right) = \dot{\boldsymbol{r}}_a\left(A\right) \tag{10.27}$$

  Les vitesses absolue $\boldsymbol{v}_a\left(P\right)$ et relative $\boldsymbol{v}_r\left(P\right)$ sont les vitesses du point matériel P dans les référentiels absolu et relatif où les repères absolu $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3\right)$ et relatif $\left(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3\right)$ sont immobiles.

- **Dérivées temporelles :** (10.26) et (10.27) dans (10.25)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a\left(P\right) = \boldsymbol{v}_a\left(P\right) \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_r\left(P\right) = \boldsymbol{v}_r\left(P\right) + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r\left(P\right) \tag{10.28}$$

- **Dérivées temporelles :** positions absolue et relative

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a(P) = \dot{\boldsymbol{r}}_a(A) + \dot{\boldsymbol{r}}_r(P) \tag{10.24}$$

- **Dérivées temporelles :** point matériel P et point A

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(P) \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_r(P) = \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r(P) \tag{10.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_a(A) = \boldsymbol{v}_a(A) \tag{10.27}$$

- **Vitesses absolue et relative :** (10.27) et (10.28) dans (10.24)

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r(P) \tag{10.29}$$

- **Vitesse d'entraînement :** P immobile dans le référentiel relatif

$$\boldsymbol{v}_e(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r(P) \tag{10.30}$$

- **Relation entre les vitesses :** (10.30) dans (10.29)

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_e(P) + \boldsymbol{v}_r(P) \tag{10.31}$$

- **Vitesse angulaire de rotation :** pour montrer que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de rotation du repère relatif est indépendante du choix de l'origine A, on choisit un autre point fixe B du référentiel relatif et on montre qu'on peut aussi le prendre comme origine sans modifier $\boldsymbol{\Omega}$.

- **Relation entre les vitesses :** (10.29) avec $\boldsymbol{r}_r\left(P\right) = \boldsymbol{AP}$ (10.21)

$$\boldsymbol{v}_a\left(P\right) = \boldsymbol{v}_a\left(A\right) + \boldsymbol{v}_r\left(P\right) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{AP} \tag{10.32}$$

- **Relation entre les vitesses :** (10.32) en $P = B$ avec $\boldsymbol{v}_r\left(B\right) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{v}_a\left(B\right) = \boldsymbol{v}_a\left(A\right) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{AB} \tag{10.33}$$

- **Relation entre les vitesses :** remise en forme

$$\boldsymbol{v}_a\left(A\right) = \boldsymbol{v}_a\left(B\right) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{BA} \tag{10.34}$$

- **Relation entre les vitesses :** (10.34) dans (10.32)

$$\boldsymbol{v}_a\left(P\right) = \boldsymbol{v}_a\left(B\right) + \boldsymbol{v}_r\left(P\right) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{AP} \tag{10.35}$$

- **Relation entre les vitesses :** (10.35) avec $\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{AP}$

$$\boldsymbol{v}_a\left(P\right) = \boldsymbol{v}_a\left(B\right) + \boldsymbol{v}_r\left(P\right) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{BP} \quad \square \tag{10.36}$$

- **Vitesses absolue et relative :** point matériel P

$$\boldsymbol{v}_a\,(P) = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\,, \quad \boldsymbol{v}_r\,(P) = \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_a\,(A) = \dot{\boldsymbol{r}}_a\,(A) \qquad (10.27)$$

- **Dérivées temporelles :** vitesses absolue et relative (10.29)

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a\,(P) = \dot{\boldsymbol{v}}_a\,(A) + \dot{\boldsymbol{v}}_r\,(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_r\,(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r\,(P) \qquad (10.37)$$

- **Dérivées temporelles :** repères absolu et relatif

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i = \boldsymbol{0} \qquad \text{et} \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_i \qquad \forall\ i = 1, 2, 3 \qquad (10.23)$$

- **Dérivée temporelle :** vitesse absolue

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a\,(P) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i + \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i \overset{(10.23)}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i \qquad (10.38)$$

- **Dérivée temporelle :** vitesse relative

$$\dot{\boldsymbol{v}}_r\,(P) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i + \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i \overset{(10.23)}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{3} \ddot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i + \sum_{i=1}^{3} \dot{y}_i\,(\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{y}}_i) \qquad (10.38)$$

- **Dérivées temporelles :** vitesses absolue et relative

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\quad\text{et}\quad\dot{\boldsymbol{v}}_r\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i+\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i\left(\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\right)\qquad(10.38)$$

- **Identité vectorielle :**

$$\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i\left(\boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{y}}_i\right)=\boldsymbol{\Omega}\times\left(\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i\right)\overset{(10.27)}{=\!=\!=}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r\left(P\right)\qquad(10.39)$$

- **Accélération absolue et relative :** point matériel P et point A

$$\boldsymbol{a}_a\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\,\hat{\boldsymbol{x}}_i\,,\quad\boldsymbol{a}_r\left(P\right)=\sum_{i=1}^{3}\ddot{y}_i\,\hat{\boldsymbol{y}}_i\quad\text{et}\quad\boldsymbol{a}_a\left(A\right)=\dot{\boldsymbol{v}}_a\left(A\right)\quad(10.40)$$

Les accélérations absolue $\boldsymbol{a}_a\left(P\right)$ et relative $\boldsymbol{a}_r\left(P\right)$ sont les accélérations du point matériel P dans les référentiels absolu et relatif où les repères absolu $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{\boldsymbol{x}}_2,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)$ et relatif $\left(\hat{\boldsymbol{y}}_1,\hat{\boldsymbol{y}}_2,\hat{\boldsymbol{y}}_3\right)$ sont immobiles.

- **Dérivées temporelles :** (10.39) et (10.40) dans (10.38)

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a\left(P\right)=\boldsymbol{a}_a\left(P\right)\qquad\text{et}\qquad\dot{\boldsymbol{v}}_r\left(P\right)=\boldsymbol{a}_r\left(P\right)+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r\left(P\right)\qquad(10.41)$$

- **Dérivées temporelles :** vitesses absolue et relative

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a(P) = \dot{\boldsymbol{v}}_a(A) + \dot{\boldsymbol{v}}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r(P) \qquad (10.37)$$

- **Dérivées temporelles :** point matériel P et point A

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(P) \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_r(P) = \boldsymbol{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r(P) \qquad (10.41)$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a(A) = \boldsymbol{a}_a(A) \qquad (10.40)$$

- **Accélérations absolue et relative :** (10.42)

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \boldsymbol{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r(P)$$

- **Dérivée temporelle :** position relative

$$\dot{\boldsymbol{r}}_r(P) = \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r(P) \qquad (10.28)$$

- **Accélérations absolue et relative :** (10.28) dans (10.42) donne (10.43)

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \boldsymbol{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \times \Big(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r(P)\Big) + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r(P)$$

- **Accélérations :** rotation du référentiel relatif

  1. **Accélération centripète :**

$$\boldsymbol{a}_c\,(P) = \boldsymbol{\Omega} \times \Big(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) \tag{10.45}$$

  2. **Accélération de Coriolis :**

$$\boldsymbol{a}_C\,(P) = 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r\,(P) \tag{10.44}$$

  3. **Accélération d'Euler :**

$$\boldsymbol{a}_E\,(P) = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r\,(P) \tag{10.46}$$

Gaspard-Gustave de Coriolis
$1792 - 1843$

- **Accélération absolue et relative :** point matériel P

$$\boldsymbol{a}_a\,(P) = \boldsymbol{a}_a\,(A) + \boldsymbol{a}_r\,(P) + \boldsymbol{a}_c\,(P) + \boldsymbol{a}_C\,(P) + \boldsymbol{a}_E\,(P) \tag{10.47}$$

- **Accélération absolue et relative :** point matériel P

$$\boldsymbol{a}_a\left(P\right) = \boldsymbol{a}_a\left(A\right) + \boldsymbol{a}_r\left(P\right) + \boldsymbol{a}_c\left(P\right) + \boldsymbol{a}_C\left(P\right) + \boldsymbol{a}_E\left(P\right) \tag{10.47}$$

- **Accélération d'entraînement :** P immobile dans le référentiel relatif

$$\boldsymbol{a}_e\left(P\right) = \boldsymbol{a}_a\left(A\right) + \boldsymbol{a}_c\left(P\right) + \boldsymbol{a}_E\left(P\right) \tag{10.48}$$

1. **Vitesse et accélération relatives :** pas de mouvement relatif

$$\boldsymbol{v}_r\left(P\right) = \boldsymbol{0} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_r\left(P\right) = \boldsymbol{0}$$

2. **Accélération de Coriolis :** pas de mouvement relatif

$$\boldsymbol{a}_C\left(P\right) = 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r\left(P\right) = \boldsymbol{0}$$

- **Relation entre les accélérations :** (10.48) dans (10.47)

$$\boldsymbol{a}_a\left(P\right) = \boldsymbol{a}_e\left(P\right) + \boldsymbol{a}_r\left(P\right) + \boldsymbol{a}_C\left(P\right) \tag{10.49}$$

- **Loi du mouvement absolu :** point matériel P

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = m\,\boldsymbol{a}_a\,(P) \tag{10.50}$$

- **Relation entre les accélérations :**

$$\boldsymbol{a}_a\,(P) = \boldsymbol{a}_a\,(A) + \boldsymbol{a}_r\,(P) + \boldsymbol{a}_c\,(P) + \boldsymbol{a}_C\,(P) + \boldsymbol{a}_E\,(P) \tag{10.47}$$

- **Loi du mouvement absolu :** point matériel P (10.47) dans (10.50)

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = m\Big(\boldsymbol{a}_a\,(A) + \boldsymbol{a}_r\,(P) + \boldsymbol{a}_c\,(P) + \boldsymbol{a}_C\,(P) + \boldsymbol{a}_E\,(P)\Big) \tag{10.51}$$

- **Référentiel relatif :** la seule accélération du point matériel P est l'accélération relative $\boldsymbol{a}_r\,(P)$.

- **Loi du mouvement relatif :** point matériel P (10.41) remis en forme

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} - m\Big(\boldsymbol{a}_a\,(A) + \boldsymbol{a}_c\,(P) + \boldsymbol{a}_C\,(P) + \boldsymbol{a}_E\,(P)\Big) = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \tag{10.52}$$

- **Lois du mouvement :** les expressions mathématiques des lois du mouvement absolu (10.50) et relatif (10.52) sont identiques mais leur interprétation physique de cause (force) à effet (accélération) est différente. Dans le référentiel relatif, il y a des forces d'inertie !

- **Forces d'inertie :**

  1. **Force inertielle :**

$$\boldsymbol{F}_i = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\,(A) \tag{10.53}$$

  2. **Force centrifuge :**

$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{a}_c\,(P) = -\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \Big(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) \tag{10.54}$$

  3. **Force de Coriolis :**

$$\boldsymbol{F}_C = -\,m\,\boldsymbol{a}_C\,(P) = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r\,(P) \tag{10.55}$$

  4. **Force d'Euler :**

$$\boldsymbol{F}_E = -\,m\,\boldsymbol{a}_E\,(P) = -\,m\,\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}_r\,(P) \tag{10.56}$$

- **Force d'entraînement :** force d'inertie exercée sur le point matériel P au repos dans le référentiel accéléré où $\boldsymbol{v}_r\,(P) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{F}_e = -\,m\,\boldsymbol{a}_e\,(P) = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_E \tag{10.57}$$

- **Loi du mouvement relatif :** $(10.53)-(10.56)$ dans (10.52)

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_E = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \tag{10.58}$$

- **Force d'inertie :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_E \tag{10.59}$$

- **Loi du mouvement relatif :** (10.59) dans (10.58)

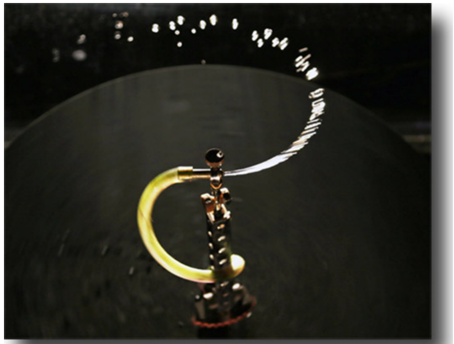
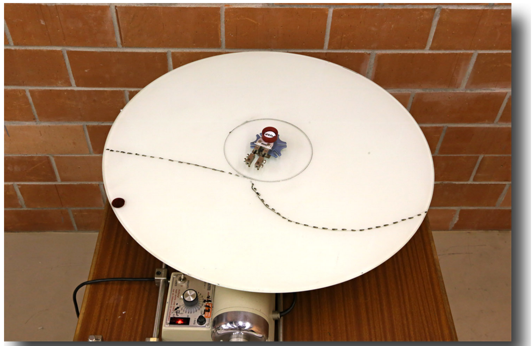
$$\boxed{\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P)} \tag{10.60}$$

- **Loi du mouvement absolu :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = m\,\boldsymbol{a}_a\,(P) \tag{10.50}$$

- **Lois du mouvement :** les termes d'accélération multipliés par la masse dans la loi du mouvement absolu deviennent des forces d'inertie dans la loi du mouvement relatif.

1. **Voiture :** trajectoire courbe
   - **Référentiel de la terre :** accélération centripète $\boldsymbol{a}_c$
   - **Référentiel de la voiture :** force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$
2. **Jet d'eau :** en rotation
   - **Référentiel du sol :** accélérations centripète $\boldsymbol{a}_c$ et de Coriolis $\boldsymbol{a}_C$
   - **Référentiel de la buse :** forces centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$
3. **Feutre :** sur plateau en rotation
   - **Référentiel du sol :** accélérations centripète $\boldsymbol{a}_c$ et de Coriolis $\boldsymbol{a}_C$
   - **Référentiel du plateau :** forces centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$

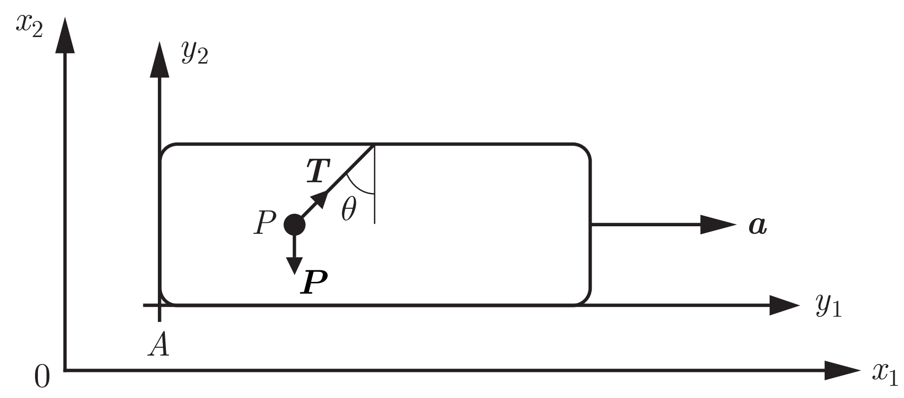




- **Référentiel absolu :** rails

  Repère absolu : $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2)$

- **Référentiel relatif :** train

  Repère relatif : $(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2)$



- **Forces extérieures :** pendule

  1. **Poids :**

  $$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 \qquad (10.61)$$

  2. **Tension :**

  $$\boldsymbol{T} = T\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 + T\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_2$$

- **Force d'inertie : $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$**

  1. **Force inertielle :** référentiel relatif

  $$\boldsymbol{F}_i = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\,(A) = -\,m\,\boldsymbol{a} = -\,ma\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \qquad (10.62)$$

- **Loi du mouvement relatif :**

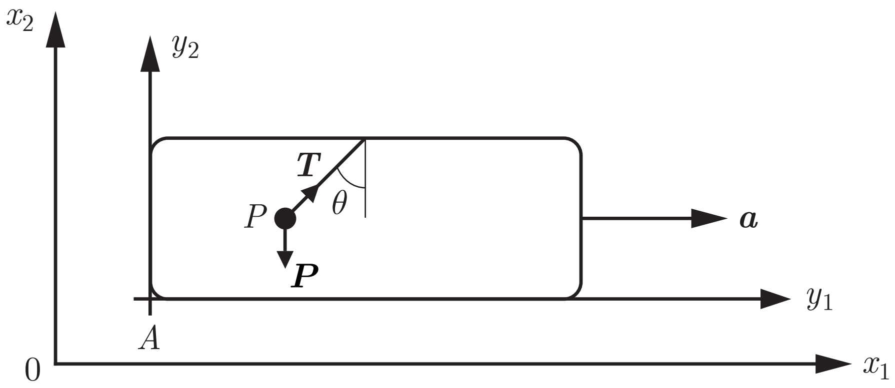
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_i = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.63)$$

- **Forces :**

$$\boldsymbol{P} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 \qquad (10.61)$$

$$\boldsymbol{T} = T\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 + T\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 \qquad (10.61)$$

$$\boldsymbol{F}_i = -\,ma\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \qquad (10.62)$$



- **Accélération relative :** équilibre

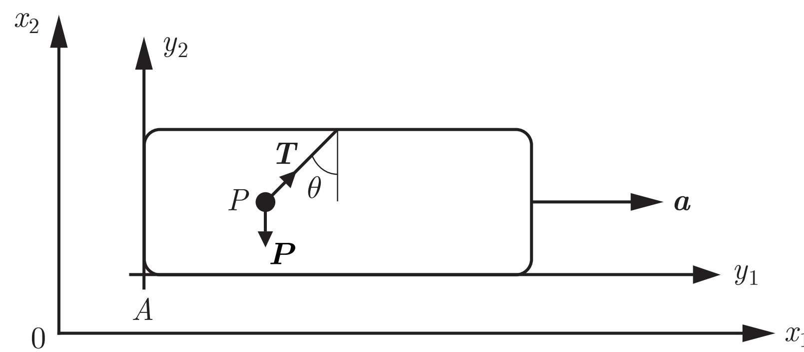
$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = \boldsymbol{0} \qquad (10.64)$$

- **Equations du mouvement relatif :** équilibre : $\theta = \theta_0$

1. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_1$: $T\sin\theta_0 - ma = 0$
2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_2$: $-\,mg + T\cos\theta_0 = 0$ (10.65)

- **Equations du mouvement relatif :**

  1. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_1$: $T\sin\theta_0 - ma = 0$
  2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_2$: $-mg + T\cos\theta_0 = 0$



- **Angle d'inclinaison :**

$$\tan\theta_0 = \frac{T\,\sin\theta_0}{T\,\cos\theta_0} = \frac{a}{g} \qquad (10.66)$$

  1. Si le train accélère ($a > 0$), le pendule est incliné vers l'arrière.
  2. Si le train freine ($a < 0$), le pendule est incliné vers l'avant.
  3. Si le train est au repos ($a = 0$), le pendule est vertical.

- **Référentiel absolu :** bâtiment

  Vecteur unitaire absolu : $\hat{\boldsymbol{x}}$

- **Référentiel relatif :** ascenseur

  Vecteur unitaire relatif : $\hat{\boldsymbol{y}}$

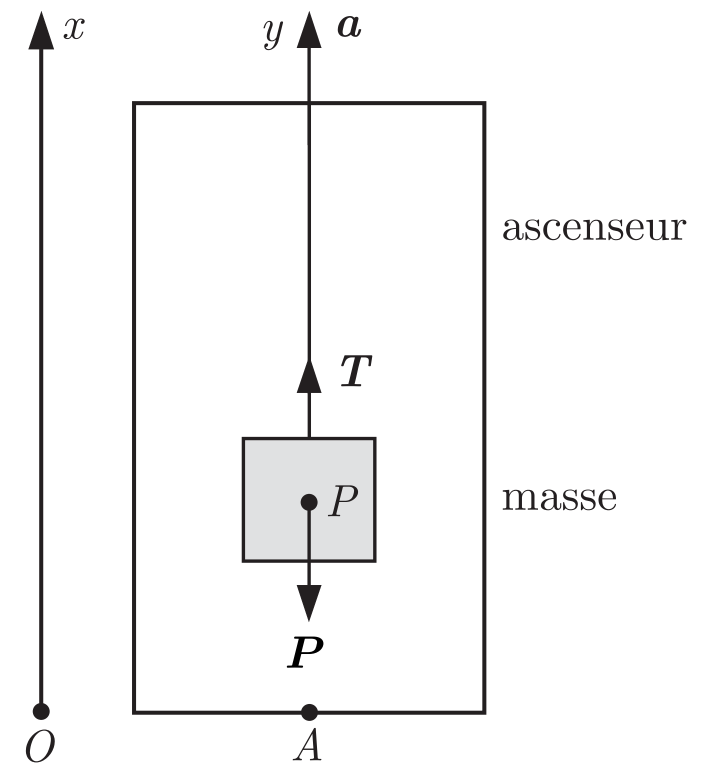
- **Forces extérieures :** masse

  1. **Poids :**

  $$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.67)$$

  2. **Tension :**

  $$\boldsymbol{T} = T\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.67)$$



- **Force d'inertie :** $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$

  1. **Force inertielle :** référentiel relatif

  $$\boldsymbol{F}_i = -\,m\,\boldsymbol{a}_a\,(A) = -\,m\,\boldsymbol{a} = -\,ma\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.68)$$

- **Loi du mouvement relatif :**

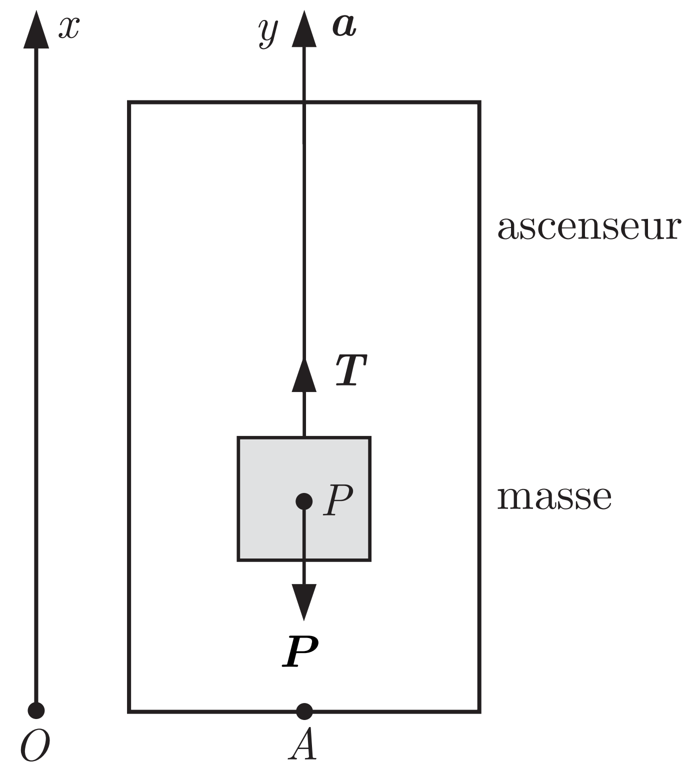
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_i = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.69)$$

- **Forces :**

$$\boldsymbol{P} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.67)$$

$$\boldsymbol{T} = T\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.67)$$

$$\boldsymbol{F}_i = -\,ma\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.68)$$



- **Accélération relative :** équilibre

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = \boldsymbol{0} \qquad (10.69)$$

- **Equation du mouvement relatif :** équilibre

1. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$: $\quad -\,mg + T - \,ma = 0 \qquad (10.70)$

10.3.2 Poids apparent

- **Tension :**

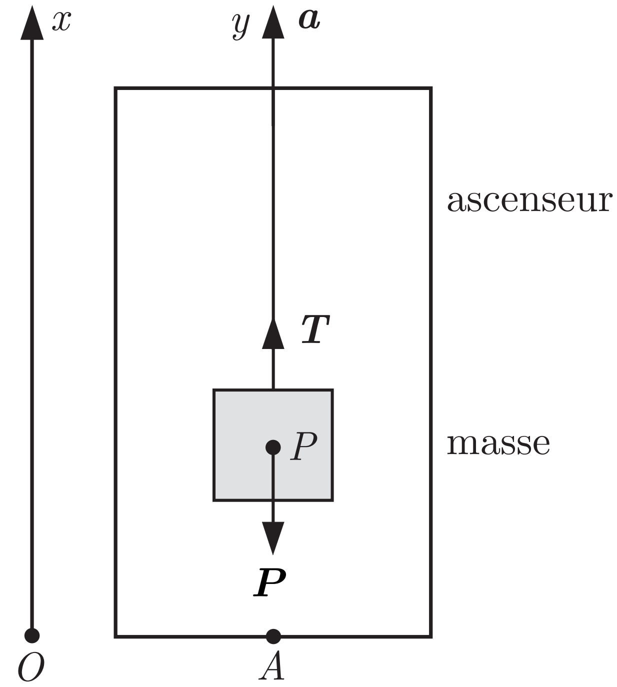
$$\boldsymbol{T} = T\,\hat{\boldsymbol{y}} = m\,(g + a)\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.71)$$

- **Equilibre :** référentiel relatif

$$\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} \qquad (10.72)$$

- **Poids apparent :**

$$\boxed{\boldsymbol{P}' = -\,\boldsymbol{T} = -\,m\,(g + a)\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (10.73)}$$



1. Si l'ascenseur monte ($a > 0$) : $\|\boldsymbol{P}'\| > \|\boldsymbol{P}\|$
2. Si l'ascenseur descend ($a < 0$) : $\|\boldsymbol{P}'\| < \|\boldsymbol{P}\|$
3. Si l'ascenseur est en chute libre ($a = -\,g$) : $\|\boldsymbol{P}'\| = 0$ (apesanteur)

- **Référentiel absolu :** laboratoire

  Repère absolu : $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$

- **Référentiel relatif :** tube

  Repère relatif : $(\hat{\boldsymbol{y}}_1, \hat{\boldsymbol{y}}_2, \hat{\boldsymbol{y}}_3)$

- **Forces extérieures :** point matériel

  1. **Poids :**

  $$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad (10.74)$$

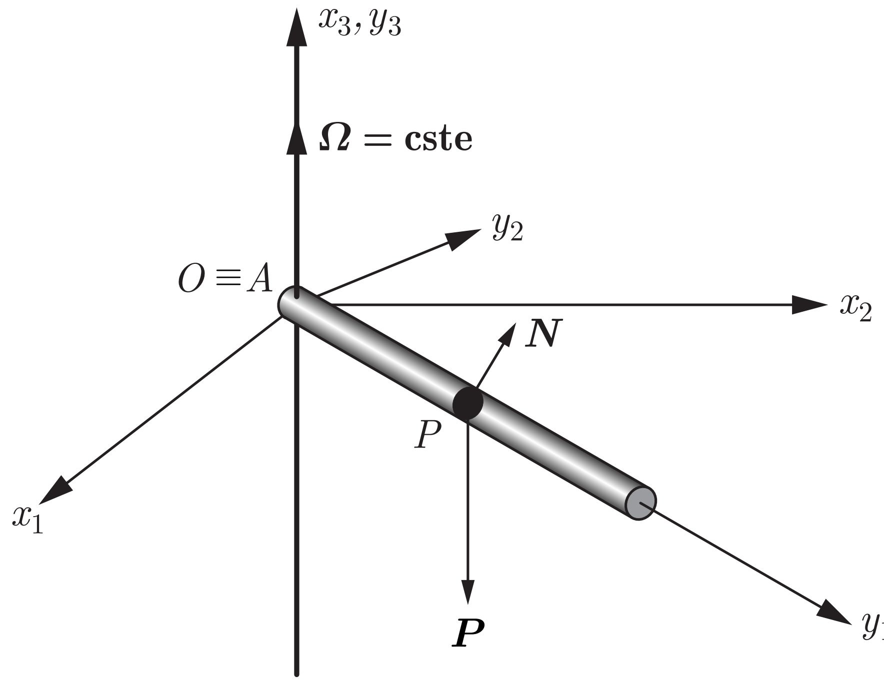
  2. **Force de réaction normale :**

  $$\boldsymbol{N} = N_2\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 + N_3\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad (10.74)$$

- **Forces d'inertie :** $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{a}_a\,(A) = \boldsymbol{0}$

  1. **Force centrifuge :** $\boldsymbol{F}_c$

  2. **Force de Coriolis :** $\boldsymbol{F}_C$



- **Loi du mouvement relatif :**

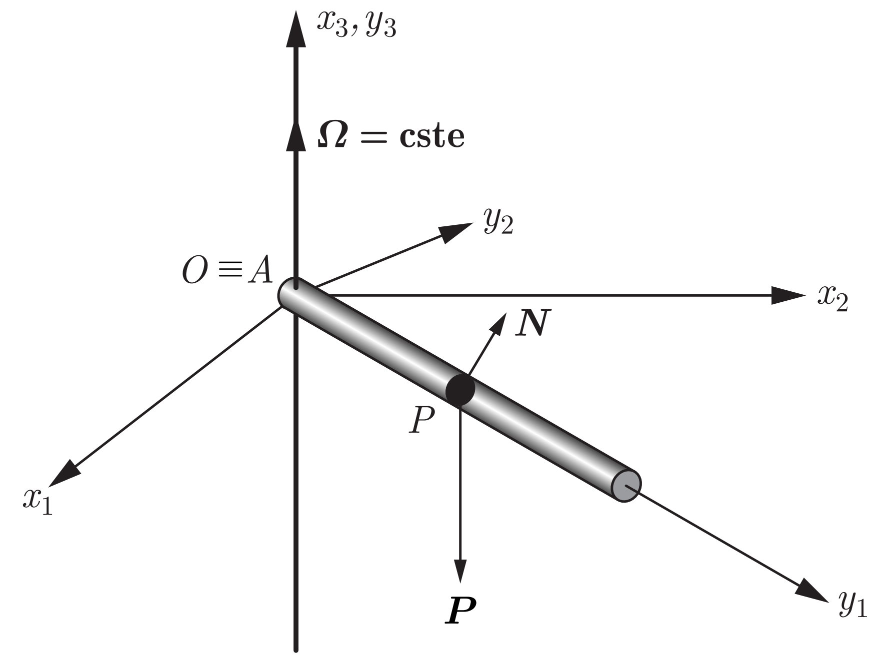
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.75)$$

- **Grandeurs cinématiques relatives :**

$$\boldsymbol{r}_r\,(P) = y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$

$$\boldsymbol{v}_r\,(P) = \dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \qquad (10.76)$$

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = \ddot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$



- **Vitesse angulaire :**

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \qquad (10.77)$$

- **Force centrifuge :** (10.78)

$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \Big(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) = -\,m\,\Omega^2\,y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \times (\hat{\boldsymbol{y}}_3 \times \hat{\boldsymbol{y}}_1) = m\,\Omega^2\,y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$

- **Force de Coriolis :** (10.78)

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_r\,(P) = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \times \hat{\boldsymbol{y}}_1 = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_2$$

- **Loi du mouvement relatif :**

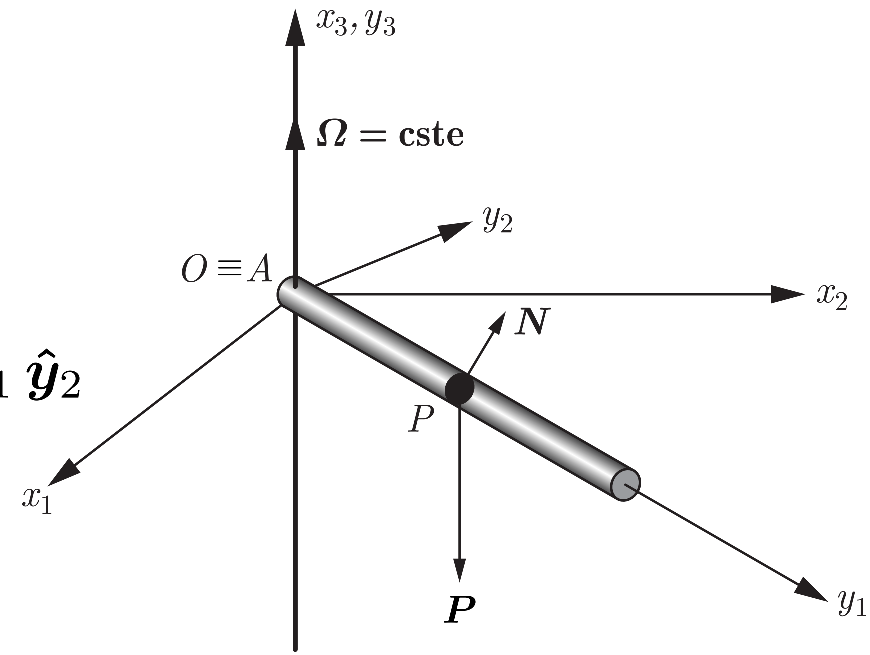
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.75)$$

- **Forces extérieures :** (10.74)

$$\boldsymbol{P} = -\,mg\,\hat{\boldsymbol{y}}_3 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{N} = N_2\,\hat{\boldsymbol{y}}_2 + N_3\,\hat{\boldsymbol{y}}_3$$

- **Forces d'inertie :** (10.78)

$$\boldsymbol{F}_c = m\,\Omega^2\,y_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_2$$



- **Accélération relative :** (10.76)

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = \ddot{y}_1\,\hat{\boldsymbol{y}}_1$$

- **Equations du mouvement relatif :**

1. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_1$: $m\,\Omega^2 y_1 = m\,\ddot{y}_1$
2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_2$: $N_2 - 2\,m\,\Omega\,\dot{y}_1 = 0$ (10.79)
3. selon $\hat{\boldsymbol{y}}_3$: $-\,mg + N_3 = 0$

- **Equation du mouvement relatif :** 2^e ordre

$$\ddot{y}_1 - \Omega^2 \, y_1 = 0 \tag{10.80}$$

- **Equations du mouvement relatif :** 1^{er} ordre

$$\dot{y}_1 = \pm \, \Omega \, y_1 \qquad \text{ainsi} \qquad y_1 \, (t) = e^{\, \pm \Omega \, t} \tag{10.81}$$

- **Equation horaire générale :**

$$y_1 \, (t) = A \, e^{\, \Omega \, t} + B \, e^{- \, \Omega \, t} \qquad \text{où} \qquad A, B = \text{cstes} \tag{10.82}$$

- **Equation de la vitesse générale :** dérivée temporelle de $y_1 \, (t)$

$$\dot{y}_1 \, (t) = A \, \Omega \, e^{\, \Omega \, t} - \, B \, \Omega \, e^{- \, \Omega \, t} \tag{10.83}$$

- **Conditions initiales :** position et vitesse relative

$$y_1 \, (0) = A + B \qquad \text{et} \qquad \dot{y}_1 \, (0) = (A - \, B) \, \Omega = 0 \tag{10.84}$$

- **Equation horaire :** particulière : $A = B = y_1 \, (0) \, / 2$

$$y_1 \, (t) = y_1 \, (0) \left(\frac{e^{\, \Omega \, t} + e^{- \, \Omega \, t}}{2} \right) \tag{10.85}$$

- **Equation horaire :** particulière

$$\boxed{y_1 \, (t) = y_1 \, (0) \, \cosh \left(\Omega \, t \right) \tag{10.86}}$$

- **Référentiel absolu :** bâtiment

  Repère absolu : $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$

- **Référentiel relatif :** porte

  Repère relatif : $\left(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$

- **Forces extérieures :** point matériel

  1. **Poids :** (10.87)

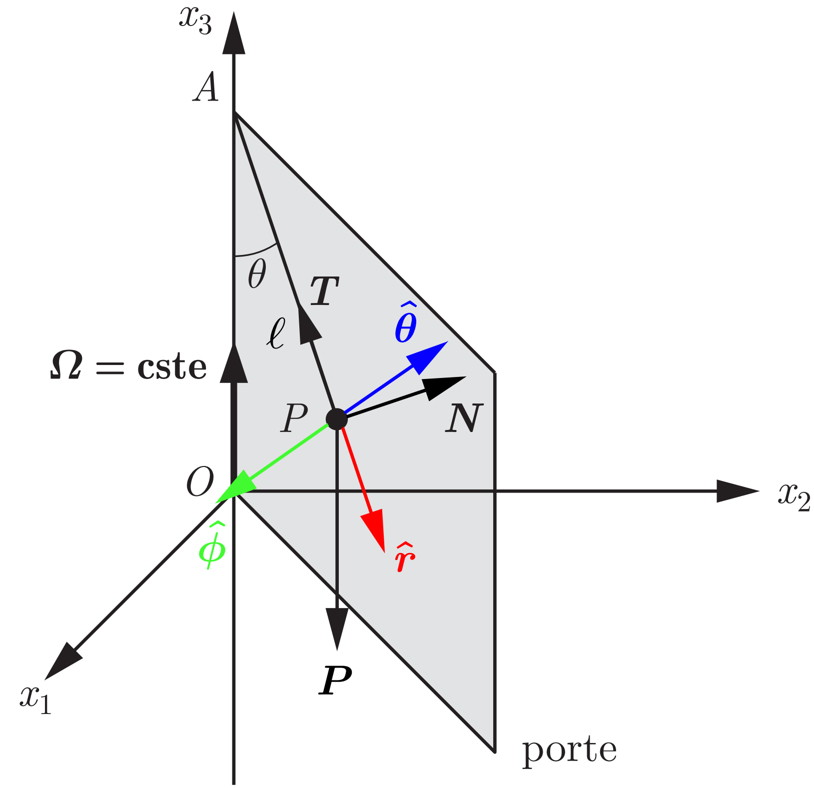
  $$\boldsymbol{P} = mg\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

  2. **Force de réaction normale :**

  $$\boldsymbol{N} = -N\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (10.87)$$

  3. **Tension :**

  $$\boldsymbol{T} = -T\,\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (10.87)$$



- **Forces d'inertie :** $\boldsymbol{\Omega} = \text{cste}$

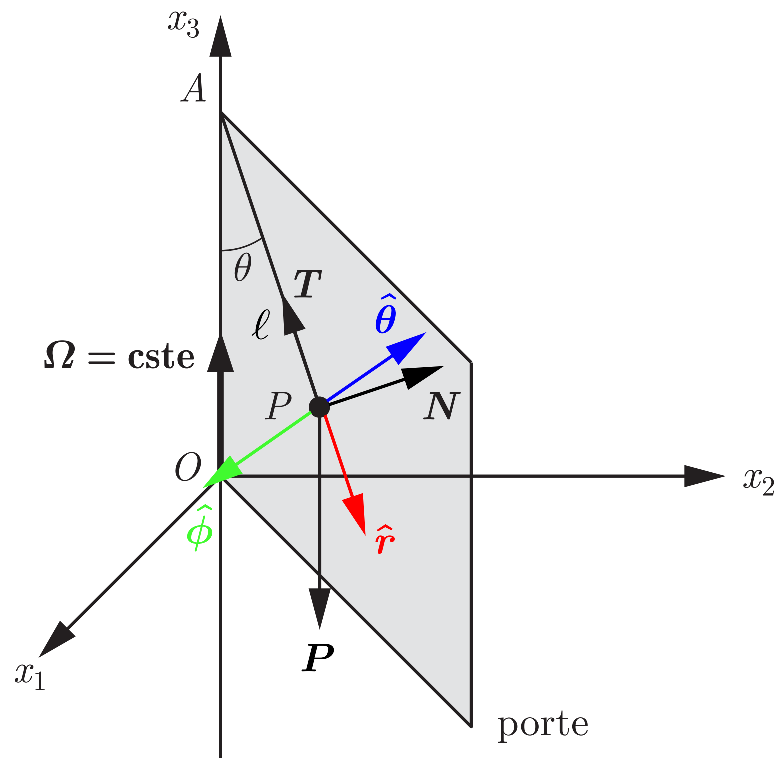
  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{0}$

  1. **Force centrifuge :** $\boldsymbol{F}_c$
  2. **Force de Coriolis :** $\boldsymbol{F}_C$

- **Loi du mouvement relatif :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.88)$$

- **Grandeurs cinématiques relatives :**



$$\boldsymbol{r}_r\,(P) = \ell\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{v}_r\,(P) = \ell\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (10.89)$$

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = -\,\ell\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{r}} + \ell\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

- **Vitesse angulaire :**

$$\boldsymbol{\Omega} = -\,\Omega\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \qquad (10.90)$$

- **Force centrifuge :**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_c &= -\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\Big(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r\,(P)\Big) \\ &= -\,m\,\ell\,\Omega^2\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\times\Big(\big(\cancel{\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\big)\times\hat{\boldsymbol{r}}\Big) \\ &= m\,\ell\,\Omega^2\,\sin^2\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + m\,\ell\,\Omega^2\,\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \qquad (10.91)$$

- **Loi du mouvement relatif :**

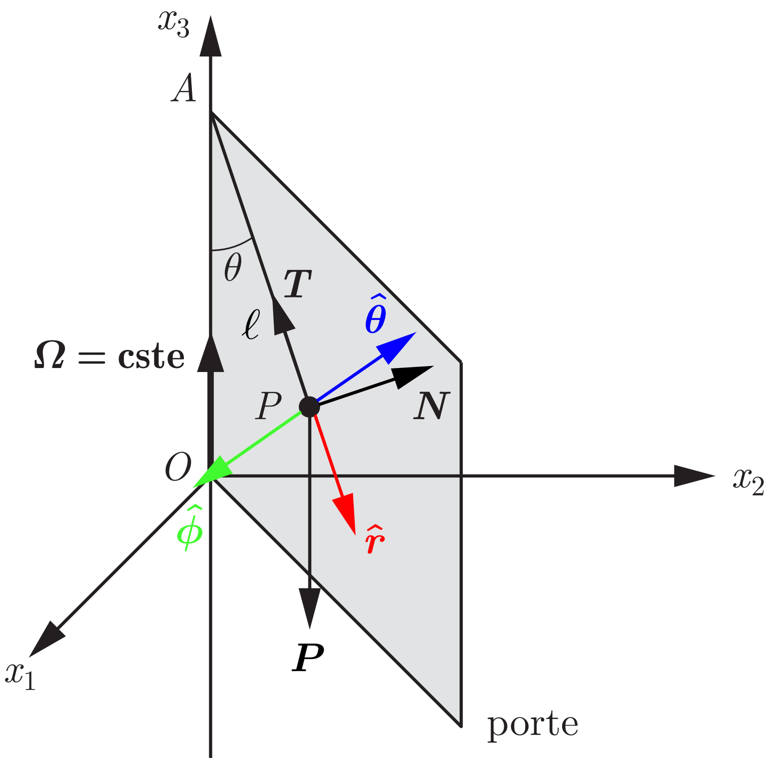
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \qquad (10.88)$$

- **Grandeurs cinématiques relatives :**

$$\boldsymbol{r}_r\,(P) = \ell\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{v}_r\,(P) = \ell\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (10.89)$$

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = -\,\ell\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{r}} + \ell\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



- **Vitesse angulaire :**

$$\boldsymbol{\Omega} = -\,\Omega\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \qquad (10.90)$$

- **Force de Coriolis :**

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r\,(P) = 2\,m\,\ell\,\Omega\,\dot{\theta}\,\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \cancel{\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}\right)\times\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= 2\,m\,\ell\,\Omega\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (10.91)$$

- **Loi du mouvement relatif :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\boldsymbol{a}_r\,(P) \tag{10.88}$$

- **Forces extérieures :** (10.87)

$$\boldsymbol{P} = mg\left(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{N} = -\,N\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{T} = -\,T\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

- **Forces d'inertie :** (10.91)

$$\boldsymbol{F}_c = m\,\ell\,\Omega^2\,\sin^2\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + m\,\ell\,\Omega^2\,\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F}_C = 2\,m\,\ell\,\Omega\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

- **Accélération relative :** (10.89)

$$\boldsymbol{a}_r\,(P) = -\,\ell\,\dot{\theta}^2\,\hat{\boldsymbol{r}} + \ell\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

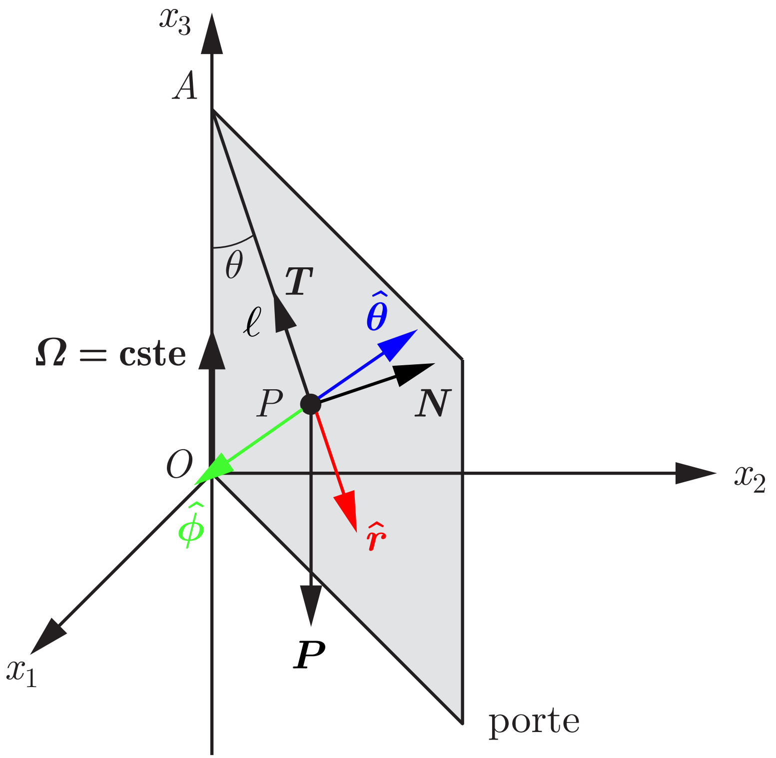
- **Equations du mouvement relatif :**

$$\begin{aligned}
&\text{①} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{r}}: \quad mg\cos\theta - T + m\,\ell\,\Omega^2\,\sin^2\theta = -\,m\,\ell\,\dot{\theta}^2\\
&\text{②} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}: \quad -\,mg\sin\theta + m\,\ell\,\Omega^2\,\sin\theta\cos\theta = m\,\ell\,\ddot{\theta}\\
&\text{③} \quad \text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}: \quad -\,N + 2\,m\,\ell\,\Omega\,\dot{\theta}\,\cos\theta = 0
\end{aligned} \tag{10.92}$$

- **Equation du mouvement relatif :**

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \cos\theta\right)\sin\theta = 0 \quad (10.93)$$

C'est la même équation du mouvement que celle d'une bille dans un anneau de rayon ℓ en rotation à vitesse angulaire scalaire $\Omega = \text{cste}$ autour d'un axe vertical.



- **Forces de contraintes :**

$$\boldsymbol{T} = -m\left(g\cos\theta + \ell\,\dot{\theta}^2 + \ell\,\Omega^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{N} = -2m\,\ell\,\Omega\,\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (10.94)$$

Les deux autres équations donnent les composantes des forces de contraintes orthogonales au mouvement relatif.